

はりの弾性剛性について(2 部材に分割した梁の弾塑性応答 1.弾性変形の補足)

はり AB 上の任意の点 C について、はり AB を 2 つの部材 AC、CB に分割した場合のはりの応力と変形の関係は、弾性時には Q&A[文書番号:SNAP00033]の「2 部材に分割した梁の弾塑性応答 1.弾性変形」で説明されるように式(4)により表されます。

このようにはりの剛性を表した場合においても、部材の応力と変形の関係は結局のところもとの部材 AB と同様になります。

長さ L の部材 AB について図 1 のような応力状態のときの A 点から距離 x_0 の点 C におけるはりの回転角 $\phi(x_0)$ を計算します。

点 C に大きさ 1 のモーメントが作用したときの応力状態は図 2 のようになります。これと補仮想仕事の原理より、

$$\phi(x_0) = \frac{1}{EI} \int_0^{x_0} -\frac{1}{L} x \left(-\frac{M_A + M_B}{L} x + M_A \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{x_0}^L -\frac{1}{L} (x - L) \left(-\frac{M_A + M_B}{L} x + M_A \right) dx$$

ここに、

EI : はりの曲げ剛性

$$\begin{aligned} EIL\phi(x_0) &= \int_0^{x_0} \frac{M_A + M_B}{L} x^2 - M_A x dx \\ &\quad + \int_{x_0}^L \frac{M_A + M_B}{L} x^2 - M_A x - (M_A + M_B)x + M_A L dx \\ &= \int_0^L \frac{M_A + M_B}{L} x^2 - M_A x dx \\ &\quad + \int_{x_0}^L - (M_A + M_B)x + M_A L dx \\ &= \left[\frac{M_A + M_B}{3L} x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 \right]_0^L \\ &\quad \left[-\frac{M_A + M_B}{L} x^2 + M_A L x \right]_{x_0}^L \\ &= \frac{M_A + M_B}{3} L^2 - \frac{1}{2} M_A L \\ &\quad - \frac{M_A + M_B}{2} L^2 + M_A L^2 + \frac{M_A + M_B}{2} x_0^2 - M_A L x_0 \\ &= \frac{M_A + M_B}{2} x_0^2 - M_A L x_0 + \frac{2M_A - M_B}{6} L^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \phi(x_0) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A + M_B}{2L} x_0^2 - M_A x_0 + \frac{2M_A - M_B}{6} L \right) \quad (\text{時計回り正}) \quad \dots(1)$$

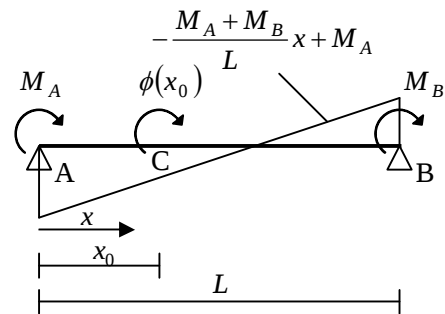


図 1 : C 点の回転角

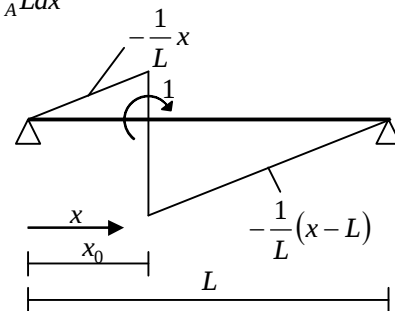


図 2 : モーメント分布

次に図 3 に示した C 点の変位 $u(x_0)$ を求めます。

点 C に大きさ 1 のモーメントが作用したときの応力状態は図 4 のようになります。これと補仮想仕事の原理より、

$$EIu(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{L-x_0}{L} x \left(-\frac{M_A+M_B}{L} x + M_A \right) dx \\ + \int_{x_0}^L -\frac{x_0}{L} (x-L) \left(-\frac{M_A+M_B}{L} x + M_A \right) dx$$

$$\begin{aligned} EIu(x_0) &= \int_0^{x_0} -\frac{M_A+M_B}{L} x^2 + M_A x + \frac{M_A+M_B}{L^2} x_0 x^2 - \frac{M_A}{L} x_0 x dx \\ &+ \int_{x_0}^L \frac{M_A+M_B}{L^2} x_0 x^2 - \frac{M_A}{L} x_0 x - \frac{M_A+M_B}{L} x_0 x + M_A x_0 dx \\ &= \int_0^L \frac{M_A+M_B}{L^2} x_0 x^2 - \frac{M_A}{L} x_0 x dx \\ &+ \int_0^{x_0} -\frac{M_A+M_B}{L} x^2 + M_A x dx \\ &+ \int_{x_0}^L -\frac{M_A+M_B}{L} x_0 x + M_A x_0 dx \\ &= \left[\frac{M_A+M_B}{3L^2} x_0 x^3 - \frac{M_A}{2L} x_0 x^2 \right]_0^L \\ &+ \left[-\frac{M_A+M_B}{3L} x^3 + \frac{M_A}{2} x^2 \right]_0^{x_0} \\ &+ \left[-\frac{M_A+M_B}{2L} x_0 x^2 + M_A x_0 x \right]_{x_0}^L \\ &= \frac{M_A+M_B}{3} x_0 L - \frac{M_A}{2} x_0 L \\ &- \frac{M_A+M_B}{3L} x_0^3 + \frac{M_A}{2} x_0^2 \\ &- \frac{M_A+M_B}{2} x_0 L + M_A x_0 L \\ &+ \frac{M_A+M_B}{2L} x_0^3 - M_A x_0^2 \\ &= \frac{M_A+M_B}{6L} x_0^3 - \frac{M_A}{2} x_0^2 + \frac{2M_A-M_B}{6} x_0 L \end{aligned}$$

$$\therefore u(x_0) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A+M_B}{6L} x_0^3 - \frac{M_A}{2} x_0^2 + \frac{2M_A-M_B}{6} x_0 L \right) \quad (\text{下向き正}) \quad \dots(2)$$

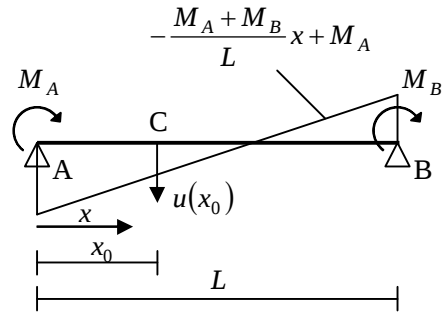


図 3 : C 点の鉛直変位

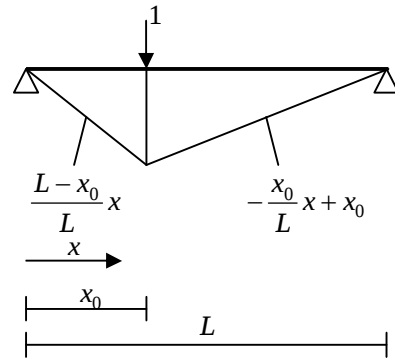


図 4 : モーメント分布

式(1)、(2)の部材 AB の点 C における回転角 $\phi(x_0)$ 、鉛直変位 $u(x_0)$ を用いて部材の曲げ変形による変形角 $\theta(x_0)$ が求まります。

$$\begin{aligned}\theta(x_0) &= \phi(x_0) - u(x_0)/x_0 \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A + M_B}{3L} x_0^2 - \frac{M_A}{2} x_0 \right) \quad (\text{時計回り正})\end{aligned} \quad \dots(3)$$

一方、部材 AC について、Q&A[文書番号:SNAP00033]の「2 部材に分割した梁の弾塑性応答 1.弾性変形」のようにはりの応力と変形の関係を表すと次のようになります。

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{3EI} & -\frac{x_0}{6EI} \\ -\frac{x_0}{6EI} & \frac{x_0}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_C \end{Bmatrix} \quad \dots(4)$$

点 C における曲げモーメントは式(5)で表されます。

$$M_C = \frac{M_A + M_B}{L} x_0 - M_A \quad \dots(5)$$

式(5)を式(4)に代入して部材 AC のたわみ角が求まります。

$$\begin{aligned}\theta_C &= -\frac{M_A x_0}{6EI} + \frac{x_0}{3EI} \left(\frac{M_A + M_B}{L} x_0 - M_A \right) \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A + M_B}{3L} x_0^2 - \frac{M_A}{2} x_0 \right)\end{aligned} \quad \dots(6)$$

このように、式(3)と式(6)が等しいことからはりを分割した場合について、はりの応力と変位の関係が同様に表せることを示しました。