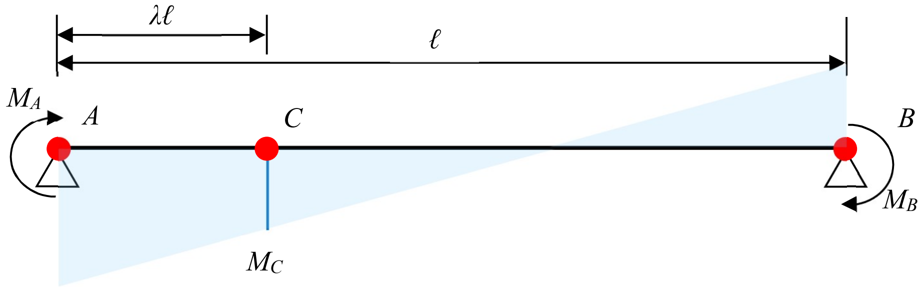
2 部材に分割した梁の弾塑性応答

2 部材に分割した梁部材の応答を通常の梁部材と比較します。
下図のように分割前後の部材長の比率をλとします。



1.弾性変形

まず、弾性変形を比較します。
通常の梁部材の曲げ変形は、材端バネの変形と中央の線材の変形の和です。
材端バネ柔性は、$\delta_A = \delta_B = \ell/6EI$です。

$$\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\dfrac{\ell}{6EI} & -\dfrac{\ell}{6EI}\\ -\dfrac{\ell}{6EI} & \dfrac{\ell}{6EI}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_A & 0\\ 0 & \delta_B\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}M_A\\ M_B\end{Bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

中央の線材の柔性　材端バネの柔性

A,B 端の回転角を計算すると以下のようになります。

$$\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\ell}{6EI}M_A - \dfrac{\ell}{6EI}M_B + \dfrac{\ell}{6EI}M_A\\ -\dfrac{\ell}{6EI}M_A + \dfrac{\ell}{6EI}M_B + \dfrac{\ell}{6EI}M_B\end{Bmatrix} \qquad \ldots(2)$$

同様に、２つに分割した梁部材の曲げ変形は、以下のように表せます。
材端バネ柔性は、

$\delta_A = \delta_C = \dfrac{\lambda\ell}{6EI}$、　$\delta'_C = \delta_B = \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}$ です。

梁 A-C について

$$\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_C\end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda\ell}{6EI} & -\dfrac{\lambda\ell}{6EI}\\ -\dfrac{\lambda\ell}{6EI} & \dfrac{\lambda\ell}{6EI}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_A & 0\\ 0 & \delta_C\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}M_A\\ -M_C\end{Bmatrix} \quad \dots(3)$$

梁 C-B について

$$\begin{Bmatrix}\theta'_C\\ \theta_B\end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI} & -\dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}\\ -\dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI} & \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta'_C & 0\\ 0 & \delta_B\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}M_C\\ M_B\end{Bmatrix} \quad \dots(4)$$

A,B,C 端の回転角を計算すると以下のようになります。

$$\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_A + \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_C + \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_A\\ -\dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_A - \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_C - \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_C\end{Bmatrix} \quad \dots(5)$$

$$\begin{Bmatrix}\theta'_C\\ \theta_B\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_C - \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_B + \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_C\\ -\dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_C + \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_B + \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_B\end{Bmatrix} \quad \dots(6)$$

ここで、節点 A,C の回転変位をθ_1, θ_2、節点 A,C,B の鉛直変位をD_{z1}, D_{z2}, D_{z3}とすると、
部材変形と節点の変位の適合※により、θ_1, θ_2は次式で表せます。

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\theta_A + \dfrac{D_{z2} - D_{z1}}{\lambda\ell}\\ \theta_C + \dfrac{D_{z2} - D_{z1}}{\lambda\ell} = \theta'_C + \dfrac{D_{z3} - D_{z2}}{(1-\lambda)\ell}\end{Bmatrix} \quad \dots(7)$$

$D_{z1} = D_{z3} = 0$なので、

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\theta_A + \dfrac{D_{z2}}{\lambda\ell}\\ \theta_C + \dfrac{D_{z2}}{\lambda\ell} = \theta'_C + \dfrac{-D_{z2}}{(1-\lambda)\ell}\end{Bmatrix} \quad \dots(8)$$

※部材変形と節点の変位の適合については、以下の Q&A をご参照ください
せん断変形を考慮した部材の変形
https://support.kozo.co.jp/support/disp.php?q2=%E3%81%9B%E3%82%93%E6%96%AD%E5%A4%89%E5%BD%A2&p1=1552

(8)式のθ_2から、D_{Z2}は次式で表せます。

$$\theta_C + \frac{D_{z2}}{\lambda\ell} = \theta'{}_C + \frac{-D_{z2}}{(1-\lambda)\ell}$$

$$\Leftrightarrow D_{Z2} = (1-\lambda) \cdot \lambda\ell \cdot (\theta'_C - \theta_C)$$

(5)(6)式のθ_C, θ'_Cを代入して

$$\Leftrightarrow D_{Z2} = (1-\lambda) \cdot \lambda\ell \left(\frac{\lambda\ell}{6EI} M_A + \frac{2\ell}{6EI} M_C - \frac{(1-\lambda)\ell}{6EI} M_B\right) \qquad \dots(9)$$

(8)式のθ_1に、(5)式のθ_A と(9)式のD_{Z2}を代入して、分割後の節点 A の回転変位は次式で表せます。

$$\theta_1 = \theta_A + \frac{D_{z2}}{\lambda\ell}$$

$$= \frac{2\lambda\ell}{6EI} M_A + \frac{\lambda\ell}{6EI} M_C + (1-\lambda) \cdot \left(\frac{\lambda\ell}{6EI} M_A + \frac{2\ell}{6EI} M_C - \frac{(1-\lambda)\ell}{6EI} M_B\right)$$

$$= \frac{(3\lambda-\lambda^2)\ell}{6EI} M_A + \frac{(2-\lambda)\ell}{6EI} M_C - \frac{(1-\lambda)^2\ell}{6EI} M_B$$

ここで、$M_C = -\dfrac{M_A + M_B}{\ell} \cdot \lambda\ell + M_A$なので、

$$\theta_1 = \frac{2\ell}{6EI} M_A - \frac{\ell}{6EI} M_B \qquad \dots(10)$$

これは、(2)式の分割前のθ_Aと等しいです。

2.塑性変形

両端が曲げ降伏した場合の塑性変形を比較します。
通常の梁部材の材端バネ柔性は、剛性低下率をαとすると、材端バネ柔性は、$\delta_A = \delta_B = \ell/6EI\alpha$です。

(1)式に代入して、 A,B 端の回転角を計算すると以下のようになります。

$$\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\ell}{6EI}M_A - \dfrac{\ell}{6EI}M_B + \dfrac{\ell}{6EI\alpha}M_A \\ -\dfrac{\ell}{6EI}M_A + \dfrac{\ell}{6EI}M_B + \dfrac{\ell}{6EI\alpha}M_B \end{Bmatrix} \qquad \dots(2')$$

同様に、２つに分割した梁部材の曲げ変形は、以下のように表せます。
材端バネ柔性は、分割後の剛性低下率をα'とすると、

$\delta_A = \dfrac{\lambda\ell}{6EI\alpha'}$、$\delta_C = \dfrac{\lambda\ell}{6EI}$、$\delta'_C = \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}$、$\delta_B = \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI\alpha'}$です。

(3)(4)式に代入して、A,B,C 端の回転角を計算すると以下のようになります。

$$\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_A + \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_C + \dfrac{\lambda\ell}{6EI\alpha'}M_A \\ -\dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_A - \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_C - \dfrac{\lambda\ell}{6EI}M_C \end{Bmatrix} \qquad \dots(5')$$

$$\begin{Bmatrix}\theta'_C\\ \theta_B\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_C - \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_B + \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_C \\ -\dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_C + \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_B + \dfrac{(1-\lambda)\ell}{6EI\alpha'}M_B \end{Bmatrix} \qquad \dots(6')$$

(8)式のθ_1に、(5′)式のθ_A と(9)式のD_{Z2}を代入して、分割後の節点 A の回転変位は次式で表せます。

$$\theta_1 = \theta_A + \frac{D_{z2}}{\lambda\ell}$$

$$= (1 + \frac{1}{\alpha'})\frac{\lambda\ell}{6EI}M_A + \frac{\lambda\ell}{6EI}M_C + (1-\lambda)\cdot\left(\frac{\lambda\ell}{6EI}M_A + \frac{2\ell}{6EI}M_C - \frac{(1-\lambda)\ell}{6EI}M_B\right)$$

$$= \left(2\lambda - \lambda^2 + \frac{\lambda}{\alpha'}\right)\frac{\ell}{6EI}M_A + (2-\lambda)\frac{\ell}{6EI}M_C - \frac{(1-\lambda)^2\ell}{6EI}M_B$$

ここで、$M_C = -\frac{M_A + M_B}{\ell}\cdot\lambda\ell + M_A$なので、

$$\theta_1 = \theta_A + \frac{D_{z2}}{\lambda\ell} = \frac{\ell}{6EI}M_A - \frac{\ell}{6EI}M_B + \left(\frac{\lambda}{\alpha'} + 1 - \lambda\right)\frac{\ell}{6EI}M_A \qquad \ldots(10')$$

θ_1が(2')式の分割前のθ_Aと等しくなるためには、

$$\frac{\lambda}{\alpha'} + 1 - \lambda = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha' = \frac{\alpha\lambda}{1 - \alpha + \alpha\lambda}$$

これは、テクニカルマニュアル『3.1.3 分割した部材の剛性低下率・塑性率・累積塑性変形倍率』に記載されている補正方法と一致します。

3.塑性率

SNAP では、最大変形θ_{max}を降伏時の変形θ_yで除することで、塑性率を算出しています。θ_{max}、θ_y共に材端バネの変形のみを使用しています。

$$\varphi = \frac{\theta_{max}}{\theta_y}$$

具体的にバイリニアの復元力特性を持つ部材で考えます。
通常の梁部材の降伏時の変形は、材端バネの柔性と降伏耐力M_yから以下のよう求められます。

$$\theta_y = \frac{\ell}{6EI} M_y$$

一方、２つに分割した梁部材の降伏時の変形も同様に材端バネの柔性と降伏耐力M_yから以下のよう求めます。通常の梁部材のλ倍になってしまうことがわかります。

$$\theta'_y = \frac{\lambda\ell}{6EI} M_y$$

前述のように、剛性低下率を α を補正することで、塑性変形θ_pを一致させても、降伏変形θ_yがλ倍であるということは、2 分割した梁の塑性率は以下のように計算されます。

$$\varphi' = \frac{\theta'_{max}}{\theta'_y} = \frac{\theta'_p + \theta'_y}{\theta'_y} = \frac{\theta_p + \lambda\theta_y}{\lambda\theta_y} = \frac{\theta_{max} - \theta_y + \lambda\theta_y}{\lambda\theta_y} = \frac{\varphi - 1 + \lambda}{\lambda} = \frac{\varphi - 1}{\lambda} + 1$$

例えば、通常の梁の塑性率 φ=3 の場合、$\lambda = 1/2$で分割した梁の塑性率$\varphi' = 5$となりますので、注意が必要です。

テクニカルマニュアル『3.1.3 分割した部材の剛性低下率・塑性率・累積塑性変形倍率』に記載されている方法は、次式のように、降伏変形の不足分Δを加算して、分割前後の塑性率が一致するよう補正しています。

$$\varphi' = \frac{\theta'_{max} + \Delta}{\theta'_y + \Delta} = \frac{\theta_{max}}{\theta_y} = \varphi$$

ここで、$\Delta = \theta_y - \theta'_y = (1 - \lambda)\theta_y = (1/\lambda - 1)\theta'_y$